Elemi függvények

Nagy Noémi

Farkas Lóránt és Sáfár Orsolya munkája alapján

2022/2023 ősz

Mi a függvény?

A függvény egy hozzárendelési szabály. Egy valós függvény a valós számokhoz ($\mathbb{R}$), esetleg a valós számok egy részhalmazához rendel hozzá pontosan egy valós számot valamilyen szabály (nem feltétlen képlet) szerint.

Mi a függvény?

A függvény egy hozzárendelési szabály. Egy valós függvény a valós számokhoz ($\mathbb{R}$), esetleg a valós számok egy részhalmazához rendel hozzá pontosan egy valós számot valamilyen szabály (nem feltétlen képlet) szerint.

Egy f függvény értelmezési tartománya azon valós számok halmaza, amelyekhez hozzárendelünk egy valós számot, jele: ÉT vagy $Dom(f)/D_f$.

Mi a függvény?

A függvény egy hozzárendelési szabály. Egy valós függvény a valós számokhoz ($\mathbb{R}$), esetleg a valós számok egy részhalmazához rendel hozzá pontosan egy valós számot valamilyen szabály (nem feltétlen képlet) szerint.

Egy f függvény értelmezési tartománya azon valós számok halmaza, amelyekhez hozzárendelünk egy valós számot, jele: ÉT vagy $Dom(f)/D_f$.

Az értékkészlet azon valós számok halmaza, amelyek előállnak képként, jele: ÉK vagy $Ran(f)/R_f$.

Mi a függvény?

A függvény egy hozzárendelési szabály. Egy valós függvény a valós számokhoz ($\mathbb{R}$), esetleg a valós számok egy részhalmazához rendel hozzá pontosan egy valós számot valamilyen szabály (nem feltétlen képlet) szerint.

Egy f függvény értelmezési tartománya azon valós számok halmaza, amelyekhez hozzárendelünk egy valós számot, jele: ÉT vagy $Dom(f)/D_f$.

Az értékkészlet azon valós számok halmaza, amelyek előállnak képként, jele: ÉK vagy $Ran(f)/R_f$.

$$Dom(f) \ni x \longmapsto f(x) \in Ran(f)$$

Mi a függvény?

A függvény egy hozzárendelési szabály. Egy valós függvény a valós számokhoz ($\mathbb{R}$), esetleg a valós számok egy részhalmazához rendel hozzá pontosan egy valós számot valamilyen szabály (nem feltétlen képlet) szerint.

Egy f függvény értelmezési tartománya azon valós számok halmaza, amelyekhez hozzárendelünk egy valós számot, jele: ÉT vagy $Dom(f)/D_f$.

Az értékkészlet azon valós számok halmaza, amelyek előállnak képként, jele: ÉK vagy $Ran(f)/R_f$.

$$Dom(f) \ni x \longmapsto f(x) \in Ran(f)$$

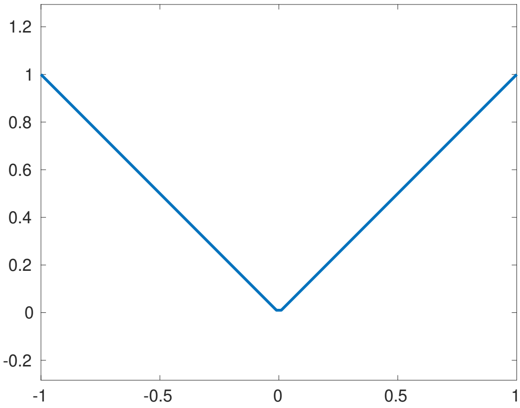
f grafikonja:

$$\{(x,f(x)) : x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2$$

Példák

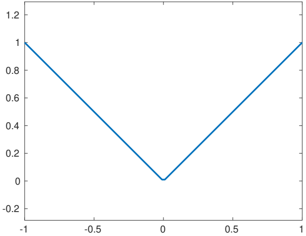
Abszolút érték: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

Ezen függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, értékkészlete $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$.



Monotonitás

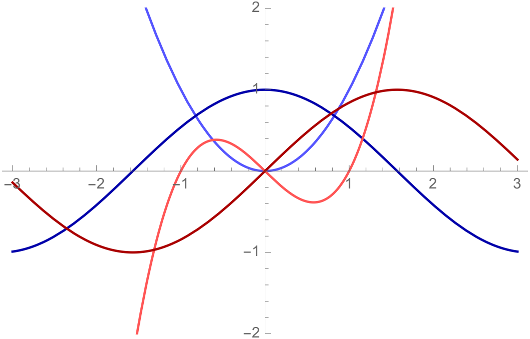
Azt mondjuk, hogy az f függvény monoton nő a $H \subset \mathbb{R}$ halmazon, ha bármely $x_1 < x_2 \in H$-ra $f(x_1) \leq f(x_2)$. Szigorúan monoton nő, ha $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz.



Az abszolút érték függvény például szigorúan monoton csökkenő $\mathbb{R}_0^- = (-\infty,0]$-n és szigorúan monoton növő $\mathbb{R}_0^+$-on.

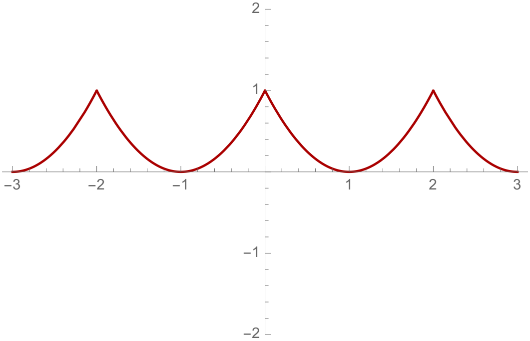
Paritás

Azt mondjuk, hogy az f függvény páros, ha $f(-x) = f(x)$(tengelyesen szimmetrikus). Azt mondjuk, hogy az f függvény páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$(középpontosan szimmetrikus). Ezek csak akkor vizsgálhatóak, ha a D_f szimmetrikus a nullára.



Periodicitás

Azt mondjuk, hogy az f függvény periodikus P periódussal, ha $f(x+P) = f(x)$. Ez is csak akkor értelmes, ha az értelmezési tartományra fennáll, hogy $x \in D_f \Rightarrow x + P \in D_f$.



Összetett függvény

Ha f és g két függvény, akkor a $h = f \circ g$ összetett függvény, a két függvény kompozíciója. A h összetett függvény értelmezési tartománya

$$D_h = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\},$$

helyettesítési értékei értékei minden $x \in D_h$ esetén

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Ha $h = f \circ g$, akkor az f az összetett függvény külső függvénye, és g a belső függvénye.

Példa összetett függvényre

Legyen $f(x) = x^2 + 1$ és $g(x) = \sqrt{x}$. Adjuk meg az $f \circ g$ kompozíció függvényt!

Példa összetett függvényre

Legyen $f(x) = x^2 + 1$ és $g(x) = \sqrt{x}$. Adjuk meg az $f \circ g$ kompozíció függvényt!

Tudjuk, hogy $D_f = \mathbb{R}$ és $D_g = \mathbb{R}_0^+$, így

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0^+$$

és

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x + 1.$$

Példa összetett függvényre

Legyen $f(x) = x^2 + 1$ és $g(x) = \sqrt{x}$. Adjuk meg az $f \circ g$ kompozíció függvényt!

Tudjuk, hogy $D_f = \mathbb{R}$ és $D_g = \mathbb{R}_0^+$, így

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0^+$$

és

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x + 1.$$

Most csináljuk fordítva, azaz legyen g a külső és f a belső függvény! Ekkor

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \in \mathbb{R}_0^+\} = \mathbb{R}$$

és

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Példa összetett függvényre

Legyen $f(x) = x^2 + 1$ és $g(x) = \sqrt{x}$. Adjuk meg az $f \circ g$ kompozíció függvényt!

Tudjuk, hogy $D_f = \mathbb{R}$ és $D_g = \mathbb{R}_0^+$, így

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0^+$$

és

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x + 1.$$

Most csináljuk fordítva, azaz legyen g a külső és f a belső függvény! Ekkor

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \in \mathbb{R}_0^+\} = \mathbb{R}$$

és

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Látható, hogy általában nem igaz, hogy $f \circ g = g \circ f$.

Inverz

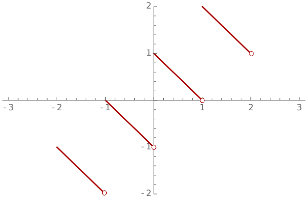
Ha $y = f(x)$, akkor az f függvény inverze az a függvény, amely y-hoz x-et rendeli. Jele f^{-1}. Ha $x \mapsto y = f(x)$, akkor $f^{-1}(y) = x \leftarrow\!\shortmid\, y$.

Inverz

Ha $y = f(x)$, akkor az f függvény inverze az a függvény, amely y-hoz x-et rendeli. Jele f^{-1}. Ha $x \mapsto y = f(x)$, akkor $f^{-1}(y) = x \leftarrow\!\shortmid y$.
Az f függvény pontosan akkor invertálható, ha R_f-ben minden szám csak egyszer áll elő x f szerinti képeként, az ilyen függvényeket injektívnek nevezzük. Ehhez elégséges hogy f szigorú monoton legyen (de ez nem szükséges). Példa:

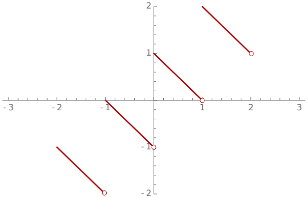
Inverz

Ha $y = f(x)$, akkor az f függvény inverze az a függvény, amely y-hoz x-et rendeli. Jele f^{-1}. Ha $x \mapsto y = f(x)$, akkor $f^{-1}(y) = x \leftarrow y$.
Az f függvény pontosan akkor invertálható, ha R_f-ben minden szám csak egyszer áll elő x f szerinti képeként, az ilyen függvényeket injektívnek nevezzük. Ehhez elégséges hogy f szigorú monoton legyen (de ez nem szükséges). Példa:



Inverz

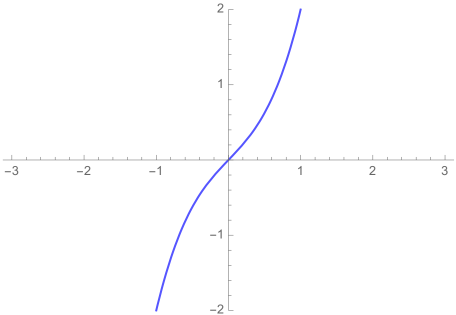
Ha $y = f(x)$, akkor az f függvény inverze az a függvény, amely y-hoz x-et rendeli. Jele f^{-1}. Ha $x \mapsto y = f(x)$, akkor $f^{-1}(y) = x \leftarrow y$.
Az f függvény pontosan akkor invertálható, ha R_f-ben minden szám csak egyszer áll elő x f szerinti képeként, az ilyen függvényeket injektívnek nevezzük. Ehhez elégséges hogy f szigorú monoton legyen (de ez nem szükséges). Példa:



Az inverz értelmezési tartománya megegyezik az eredeti függvény értékkészletével $D_{f^{-1}} = R_f$, és az inverz értékkészlete megegyezik az eredeti függvény értelmezési tartományával $R_{f^{-1}} = D_f$. Sőt, az is igaz, hogy $(f^{-1})^{-1} = f$, illetve $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

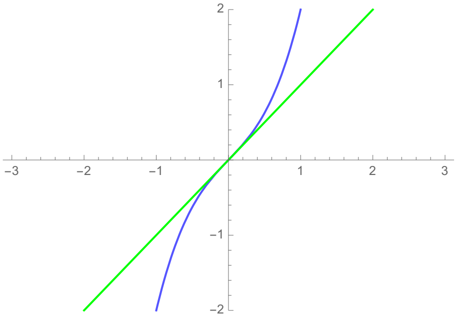
Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



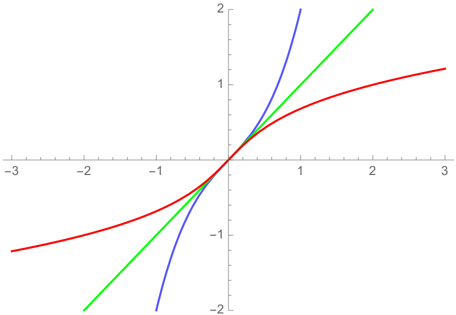
Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



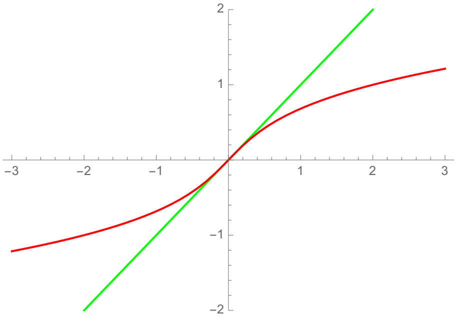
Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



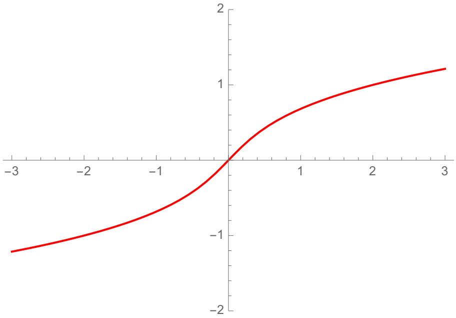
Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



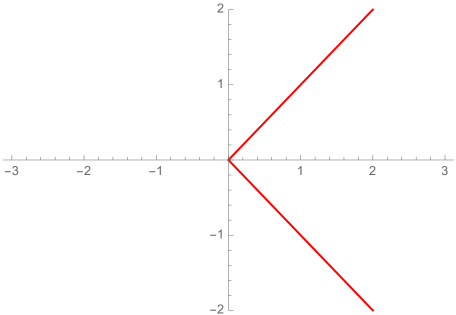
Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



Inverz II

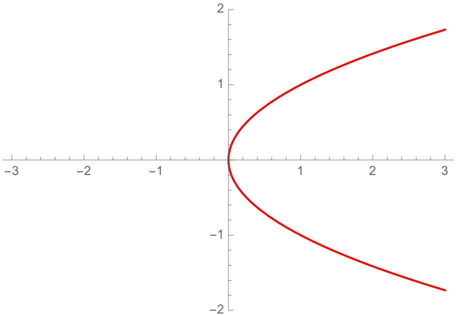
Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



Emiatt az abszolútérték függvény nem invertálható, hiszen a pozitív értékeket kétszer veszi fel.

Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.

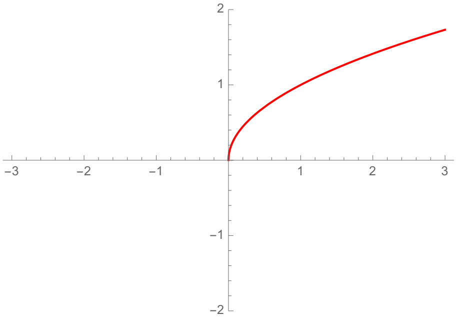


Emiatt az abszolútérték függvény nem invertálható, hiszen a pozitív értékeket kétszer veszi fel.

Ugyanez a helyzet az $f(x) = x^2$-el. De mégis értelmezhetjük az inverzét úgy, hogy leszűkítjük f értelmezési tartományát a nemnegatív számokra.

Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



Emiatt az abszolútérték függvény nem invertálható, hiszen a pozitív értékeket kétszer veszi fel.

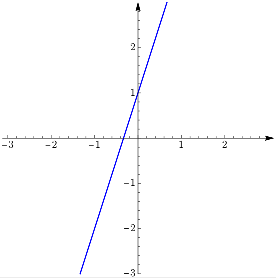
Ugyanez a helyzet az $f(x) = x^2$-el. De mégis értelmezhetjük az inverzét úgy, hogy leszűkítjük f értelmezési tartományát a nemnegatív számokra.

Példa az inverzre

Tegyük fel, hogy az $y = 3x + 1$ függvényt szeretnénk invertálni.

Példa az inverzre

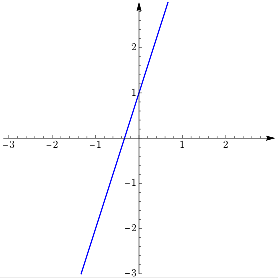
Tegyük fel, hogy az $y = 3x + 1$ függvényt szeretnénk invertálni.



Példa az inverzre

Tegyük fel, hogy az $y = 3x + 1$ függvényt szeretnénk invertálni.

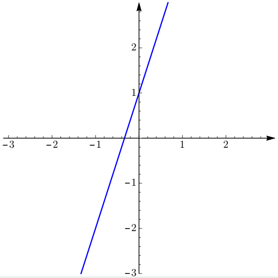
$$\begin{aligned} y &= 3x + 1 \\ y - 1 &= 3x \\ \frac{y-1}{3} &= x \end{aligned}$$



Példa az inverzre

Tegyük fel, hogy az $y = 3x + 1$ függvényt szeretnénk invertálni.

$$\begin{aligned} y &= 3x + 1 \\ y - 1 &= 3x \\ f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3} &= x \end{aligned}$$

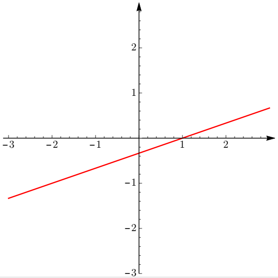


Példa az inverzre

Tegyük fel, hogy az $y = 3x + 1$ függvényt szeretnénk invertálni.

$$\begin{aligned} y &= 3x + 1 \\ y - 1 &= 3x \\ f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3} &= x \end{aligned}$$

Tehát, ha az $f(x) = 3x + 1$ akkor $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$.

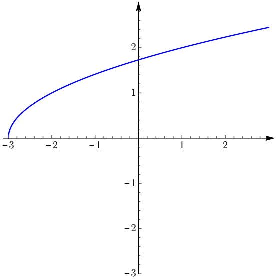


Példa az inverzre II

Tegyük fel, hogy az $y = \sqrt{x+3}$ függvényt szeretnénk invertálni.

Példa az inverzre II

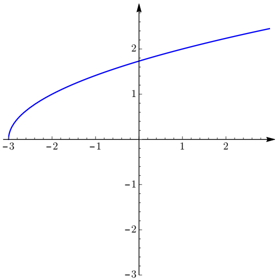
Tegyük fel, hogy az $y = \sqrt{x+3}$ függvényt szeretnénk invertálni.



Példa az inverzre II

Tegyük fel, hogy az $y = \sqrt{x+3}$ függvényt szeretnénk invertálni.

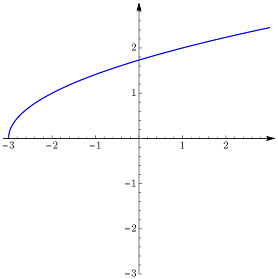
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+3} \\ y^2 &= x+3 \\ y^2-3 &= x \end{aligned}$$



Példa az inverzre II

Tegyük fel, hogy az $y = \sqrt{x+3}$ függvényt szeretnénk invertálni.

$$\begin{aligned} y =& \sqrt{x+3} \\ y^2 =& x+3 \\ f^{-1}(y) = y^2 - 3 =& x \end{aligned}$$

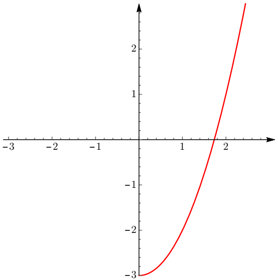


Példa az inverzre II

Tegyük fel, hogy az $y = \sqrt{x+3}$ függvényt szeretnénk invertálni.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+3} \\ y^2 &= x+3 \\ f^{-1}(y) = y^2 - 3 &= x \end{aligned}$$

Tehát, ha az $f(x) = \sqrt{x+3}$, akkor $f^{-1}(x) = x^2 - 3$.



Nevezetes függvények-Exponenciális függvény: a^x

Számolási szabályok exponenciális kifejezésekre,

- ha a, b tetszőleges valós számok és α, β tetszőleges természetes számok:
  $a^\alpha \cdot b^\alpha = (a \cdot b)^\alpha, \quad a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$
- illetve ha $a \neq 0$:
  $a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}, \quad a^0 = 1, \text{ továbbá } \frac{b^\alpha}{a^\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha, \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

Vigyázat!

$$(a^\alpha)^\beta \neq a^{\alpha^\beta} = a^{(\alpha^\beta)},$$

így például $10^{10^2} = 10^{(10^2)} \neq \left(10^{10}\right)^2 = 10^{20}$, hanem $10^{(10^2)} = 10^{100}$!

Nevezetes függvények-Exponenciális függvény: a^x

Számolási szabályok exponenciális kifejezésekre (gyökökre) ($a > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$):

$$\sqrt[\alpha]{a} = a^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \sqrt[\alpha]{a^\beta} = a^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^\beta, \quad \sqrt[\alpha]{a \cdot b} = \sqrt[\alpha]{a} \cdot \sqrt[\alpha]{b}, \quad \sqrt[\alpha]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[\alpha]{a}}{\sqrt[\alpha]{b}}$$

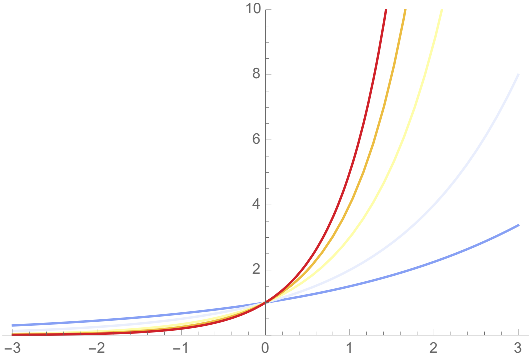
Vigyázat!

$$\sqrt[n^2]{2} \neq \sqrt{\sqrt[n]{2}},$$

hanem $\sqrt[n^2]{2} = 2^{\frac{1}{n^2}} = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{2}}$, míg $\sqrt{\sqrt[n]{2}} = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{2}$!

Exponenciális függvények, $a > 1$

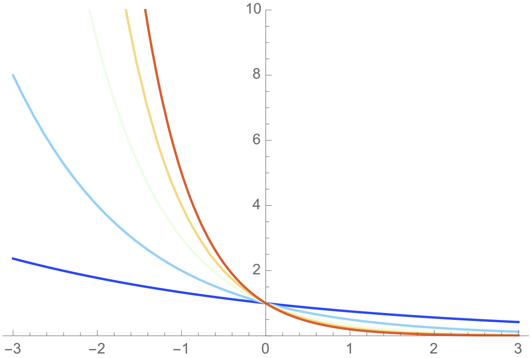
Az $f(x) = a^x$ függvény grafikonja, ha $a > 1$:



A teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, szigorú monoton nő.

Exponenciális függvények, $0 < b < 1$

Mivel $b^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ (ahol $a > 1$), ezért $f(x) = b^x$ grafikonja az a^x függvény y tengelyre vett tükörképe.



A teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú mon. csökken.

Nevezetes függvények: logaritmus

A logaritmus függvény az exponenciális függvény inverze. Definíció szerint $\log_a b$ az a szám, amelyre a-t emelve b-t kapjuk, azaz

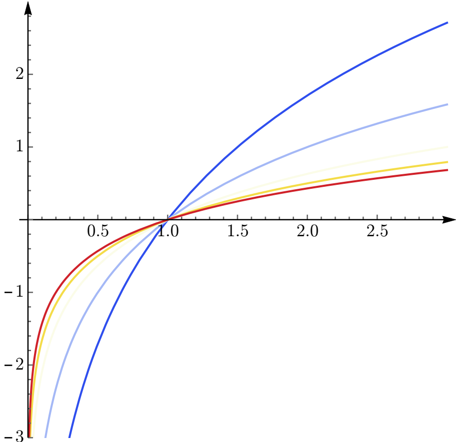
$$a^{\log_a b} = b$$

Ez a definíció köti össze az exponenciális kifejezések számolási szabályait a logaritmusos kifejezésekével. Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $b,c,d \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ekkor

$\log_a(c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$	$\log_a(b^\alpha) = \alpha \log_a b$
$\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$	$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$

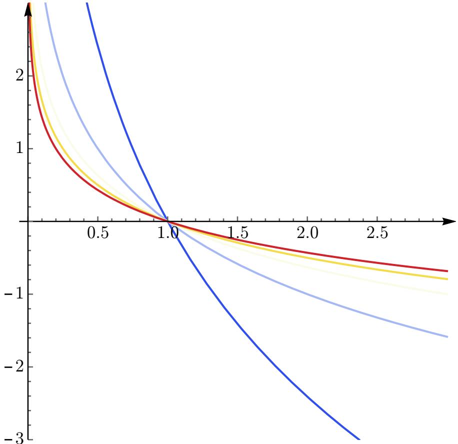
Nevezetes függvények: $\log_a x$, $a > 1$

Mivel a^x a teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú monoton nő, így az inverze: $\log_a x$ $\mathbb{R}^+$-n értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}$ és szigorú monoton nő.



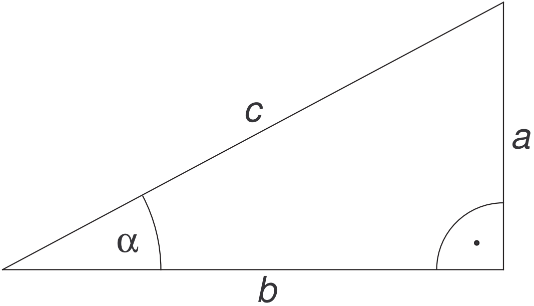
Nevezetes függvények: $\log_b x$, $0 < b < 1$

Mivel b^x a teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú monoton csökken, így az inverze $\mathbb{R}^+$-n értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}$ és szigorú monoton csökken.



Trigonometrikus függvények: sin, cos, tan

Definíció hegyesszögekre: legyenek egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a és b, átfogójának hossza c. Az a oldallal szembeni szöge α. Ekkor:



Definíció szerint:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Trigonometrikus függvények: sin, cos

Ebből következően néhány nevezetes érték:

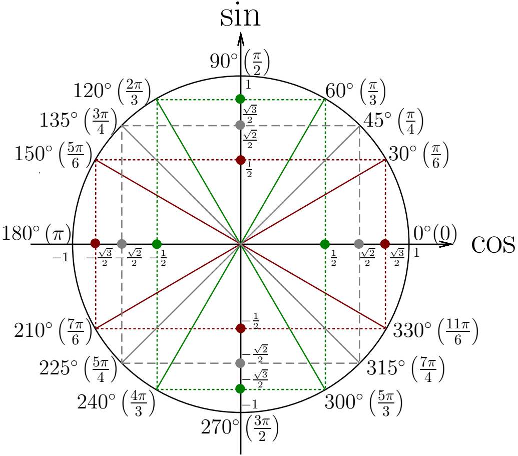
$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Trigonometrikus függvények: sin, cos

Kiterjesztés az összes szögre (az ábráért köszönet Nagy Ilonának)



Trigonometrikus függvények: sin, cos

Kiterjesztés alapján további nevezetes értékek ($k \in \mathbb{Z}$):

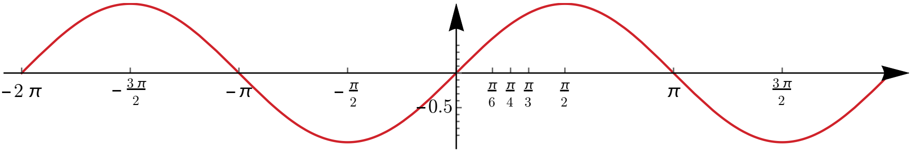
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

$$\sin(k\pi) = 0$$

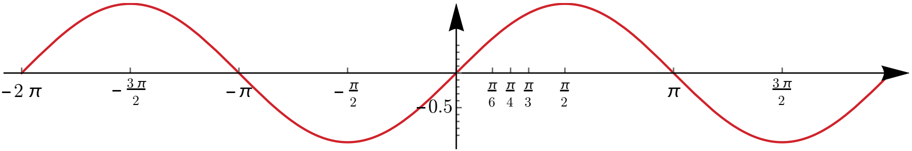
$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

Trigonometrikus függvények: sin



Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$.
Nem monoton, 2π szerint periodikus, páratlan ($\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$).
Egyéb szimmetriái: $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$.

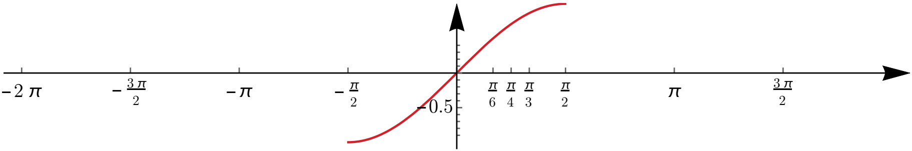
Trigonometrikus függvények: sin



Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1{,}1]$.
Nem monoton, 2π szerint periodikus, páratlan ($\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$).
Egyéb szimmetriái: $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$.

Szertnénk invertálni, de nem injektív. Mit csináljunk?

Trigonometrikus függvények: sin



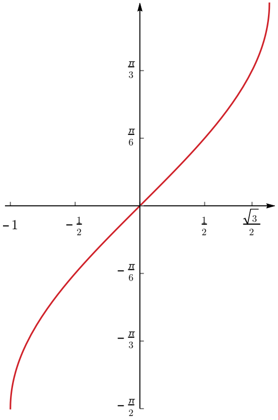
Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$.
Nem monoton, 2π szerint periodikus, páratlan ($\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$).
Egyéb szimmetriái: $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$, $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$.

Szertnénk invertálni, de nem injektív. Mit csináljunk?

Szűkítsük le az értelmezési tartományt a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumra!

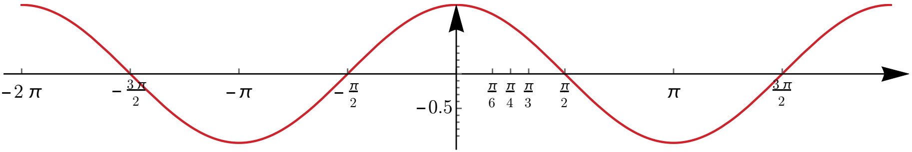
Nevezetes függvények: arcsin

Az arcsin függvény a "csonkolt" sin függvény inverze: $\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$.



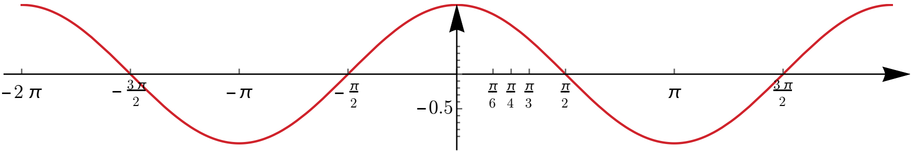
Értelmezési tartománya a $[-1,1]$, értékkészlete a $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, szigorú monoton nő, páratlan.

Trigonometrikus függvények: cos



Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$.
Nem monoton, 2π szerint periodikus, páros, azaz $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
Egyéb szimmetriái: $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$, $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$.

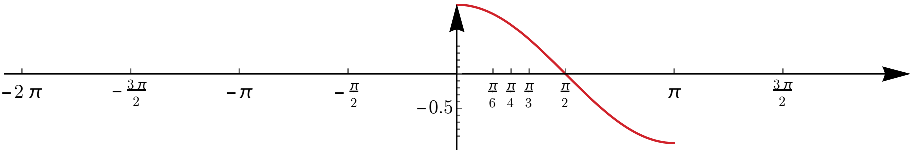
Trigonometrikus függvények: cos



Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$.
Nem monoton, 2π szerint periodikus, páros, azaz $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
Egyéb szimmetriái: $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$.

Szertnénk invertálni, de nem injektív. Mit csináljunk?

Trigonometrikus függvények: cos



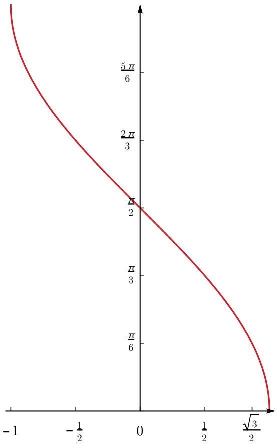
Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$.
Nem monoton, 2π szerint periodikus, páros, azaz $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
Egyéb szimmetriái: $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$, $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$.

Szertnénk invertálni, de nem injektív. Mit csináljunk?

Szűkítsük le az értelmezési tartományt a $[0,\pi]$ intervallumra!

Nevezetes függvények: arccos

Az arccos függvény a "csonkolt" cos függvény inverze: $\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]} \right)^{-1}$.



Értelmezési tartománya a $[-1,1]$, értékkészlete a $[0,\pi]$, szigorú monoton csökken.

Trigonometrikus függvények: tan

A tangens függvény definíciója: $\tan\alpha = \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
Ebből következően a nevezetes értékek ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

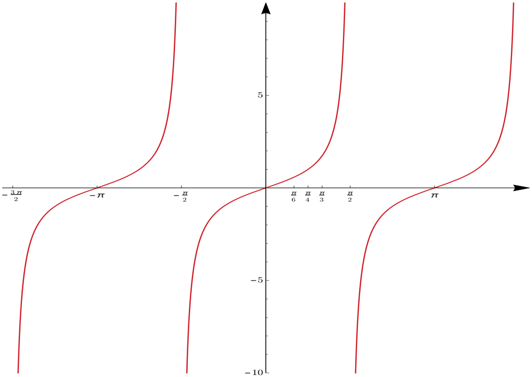
$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\tan(k\pi) = 0$$

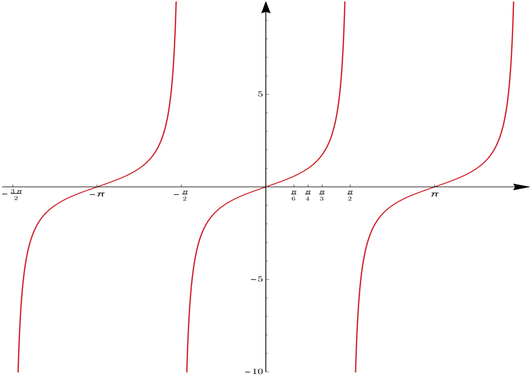
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad \text{nem értelmezett}$$

Trigonometrikus függvények: tan



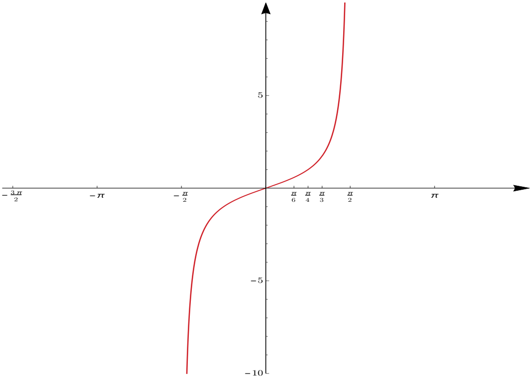
Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, értékkészlete $\mathbb{R}$.
Nem monoton, π periodikus, páratlan, azaz $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.

Trigonometrikus függvények: tan



Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, értékkészlete $\mathbb{R}$.
Nem monoton, π periodikus, páratlan, azaz $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.
Szertnénk invertálni, de nem injektív. Mit csináljunk?

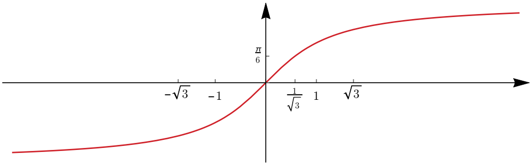
Trigonometrikus függvények: tan



Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, értékkészlete $\mathbb{R}$.
Nem monoton, π periodikus, páratlan, azaz $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.
Szertnénk invertálni, de nem injektív. Mit csináljunk?
Szűkítsük le az értelmezési tartományt a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra!

Nevezetes függvények: arctan

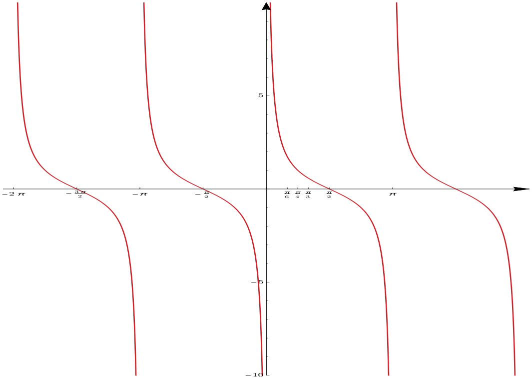
Az arctan függvény a "csonkolt" tan függvény inverze:
$\arctan = \mathrm{arctg} = \left(\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \right)^{-1}$.



Értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, értékkészlete $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, szigorú monoton nő, páratlan.

Trigonometrikus függvények: ctg

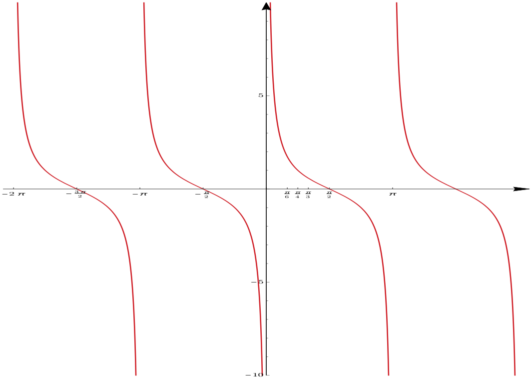
A kotangens függvény definíciója: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.



Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi\}$, értékkészlete a $\mathbb{R}$.
Nem monoton, π periodikus, páratlan, azaz $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$.

Trigonometrikus függvények: ctg

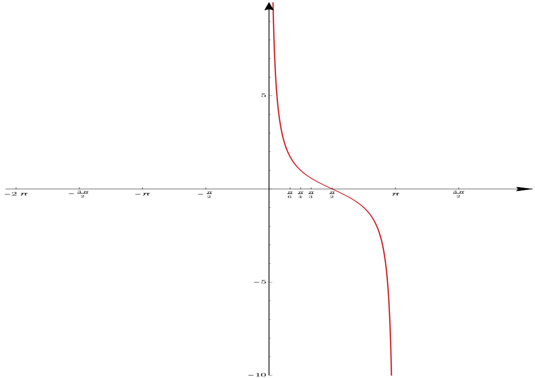
A kotangens függvény definíciója: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.



Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi\}$, értékkészlete a $\mathbb{R}$.
Nem monoton, π periodikus, páratlan, azaz $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$.
Szertnénk invertálni, de nem injektív. Mit csináljunk?

Trigonometrikus függvények: ctg

A kotangens függvény definíciója: $\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

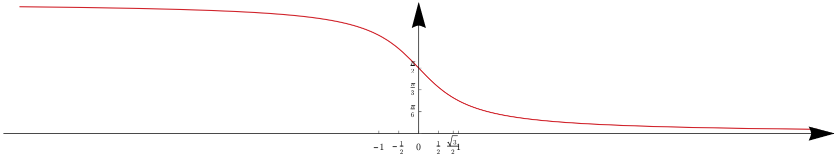


Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi\}$, értékkészlete a $\mathbb{R}$.
Nem monoton, π periodikus, páratlan, azaz $\text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg}\alpha$.
Szertnénk invertálni, de nem injektív. Mit csináljunk?
Szűkítsük le az értelmezési tartományt a $(0, \pi)$ intervallumra!

Nevezetes függvények: arcctg

Az arcctg függvény a "csonkolt" ctg függvény inverze:

$\operatorname{arcctg} = \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)} \right)^{-1}.$



Értelmezési tartománya a $\mathbb{R}$, értékkészlete $(0,\pi)$, szigorú monoton csökken.

Összefüggések a szögfüggvények között

Tegyük fel, hogy $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1,$$

hiszen a $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ pont az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körön van.

Összefüggések a szögfüggvények között

Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

hiszen a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ pont az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körön van.
A kétszeres szögekre:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

és

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Összefüggések a szögfüggvények között

Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

hiszen a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ pont az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körön van.

A kétszeres szögekre:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

és

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Felhasználva a koszinusz kétszeres szögekre vonatkozó összefüggést kapjuk a linearizáló azonosságokat:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad \text{és} \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

Összefüggések a szögfüggvények között II

Végül két szög összegére az addíciós tételek:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}
$$

Összefüggések a szögfüggvények között II

Végül két szög összegére az addíciós tételek:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha, \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

Ezekből:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right], \\
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right], \\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right].
\end{aligned}$$

Összefüggések a szögfüggvények között III

A $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ és a $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ összefüggésből az is következik, hogy

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha), \text{ ha } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Összefüggések a szögfüggvények között III

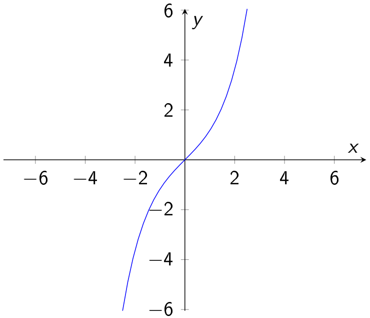
A $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ és a $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ összefüggésből az is következik, hogy

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha), \text{ ha } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Amiből:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \\ \cos(\alpha) &= \frac{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.\end{aligned}$$

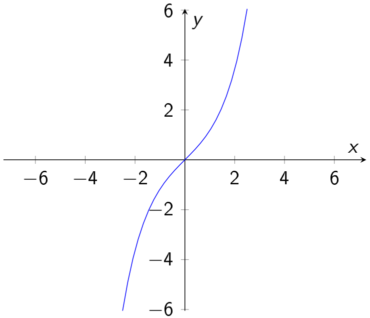
Hiperbolikus függvények: sinh



Definíció:

$$\sinh(x) = \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Hiperbolikus függvények: sinh



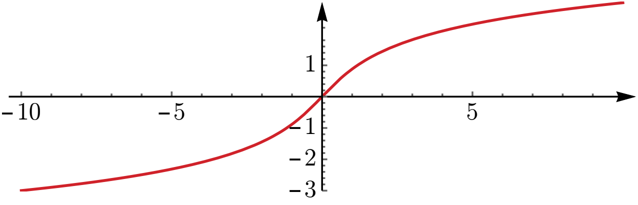
Definíció:

$$\sinh(x) = \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete is $\mathbb{R}$. Szigorúan monoton növő, nem periodikus, páratlan ($\sinh(-x) = -\sinh(x)$).

Nevezetes függvények: arsinh

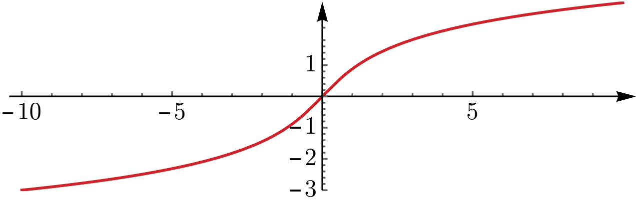
Az arsinh függvény a sinh függvény inverze.



$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Nevezetes függvények: arsinh

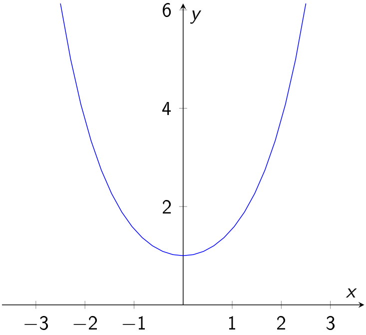
Az arsinh függvény a sinh függvény inverze.



$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Értelmezési tartománya a $\mathbb{R}$, értékkészlete szintén $\mathbb{R}$, szigorú monoton nő, páratlan.

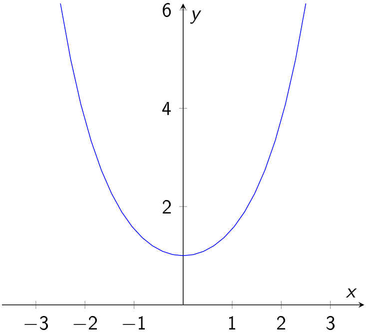
Hiperbolikus függvények: cosh



Definíció:

$$\cosh(x) = \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Hiperbolikus függvények: cosh

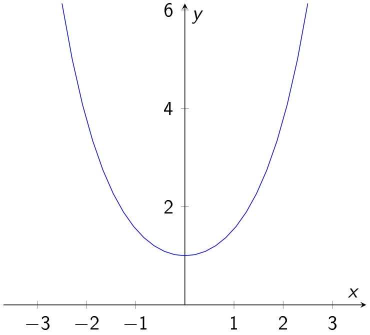


Definíció:

$$\cosh(x) = \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete $[1, +\infty)$. Nem monoton, nem periodikus, páros ($\cosh(-x) = \cosh(x)$).

Hiperbolikus függvények: cosh



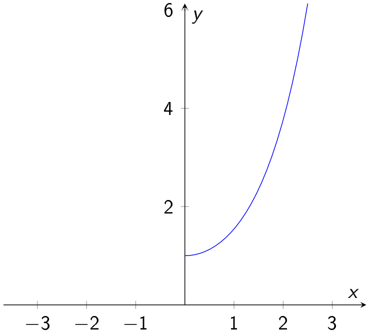
Definíció:

$$\cosh(x) = \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete $[1, +\infty)$. Nem monoton, nem periodikus, páros $(\cosh(-x) = \cosh(x))$.

Szeretnénk invertálni, de nem monoton. Mit csináljunk?

Hiperbolikus függvények: cosh



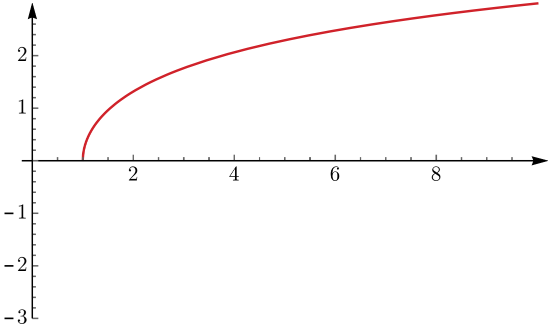
Definíció:

$$\cosh(x) = \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete $[1, +\infty)$. Nem monoton, nem periodikus, páros ($\cosh(-x) = \cosh(x)$).
Szeretnénk invertálni, de nem monoton. Mit csináljunk?
Szűkítsük le az értelmezési tartományt $[0, +\infty)$-re!

Nevezetes függvények: arcosh

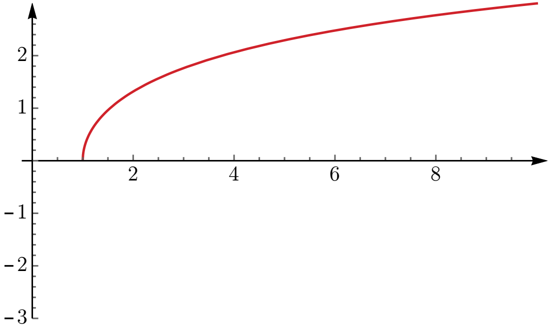
Az arcosh függvény a cosh függvény inverze.



$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Nevezetes függvények: arcosh

Az arcosh függvény a cosh függvény inverze.



$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Értelmezési tartománya az $[1, +\infty)$, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú monoton nő.

Összefüggések a hiperbolikus függvények között

Tegyük fel, hogy $u \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1,$$

vagyis a $(\cosh u, \sinh u)$ pont az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbolán van.

Összefüggések a hiperbolikus függvények között

Tegyük fel, hogy $u \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1,$$

vagyis a $(\cosh u, \sinh u)$ pont az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbolán van.
A kétszeres szögekre:

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

és

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Összefüggések a hiperbolikus függvények között

Tegyük fel, hogy $u \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1,$$

vagyis a $(\cosh u, \sinh u)$ pont az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbolán van.
A kétszeres szögekre:

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

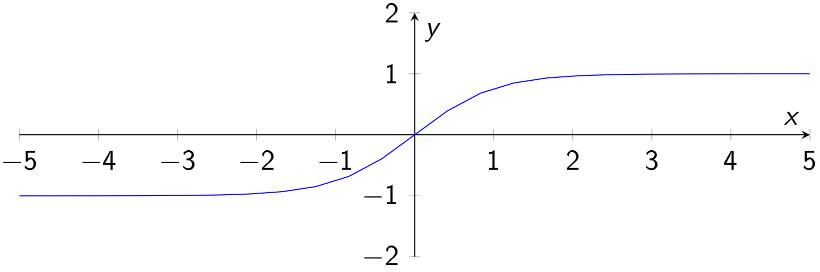
és

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Felhasználva a koszinusz hiperbolikusz kétszeres szögekre vonatkozó összefüggését kapjuk a linearizáló azonosságokat:

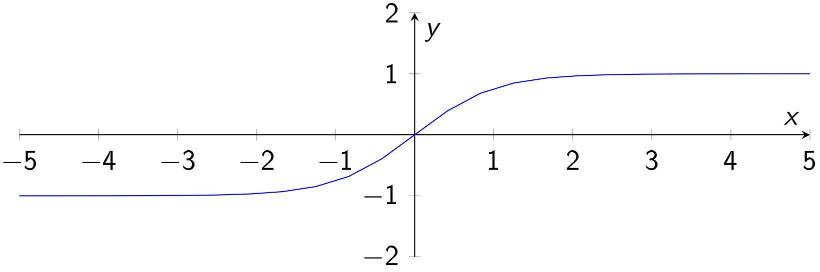
$$\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \quad \text{és} \quad \cosh^2 x = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}$$

Hiperbolikus függvények: tanh



$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Hiperbolikus függvények: tanh

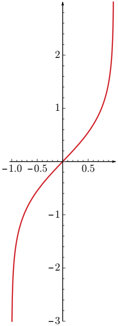


$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Értelmezési tartománya: $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$. Szigorúan monoton növő, páratlan, azaz $\tanh(-x) = -\tanh(x)$.

Nevezetes függvények: artanh

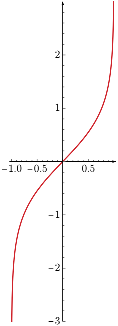
Az artanh függvény a tanh függvény inverze.



$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Nevezetes függvények: artanh

Az artanh függvény a tanh függvény inverze.



$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Értelmezési tartománya az $[-1,1]$, értékkészlete $\mathbb{R}$, szigorú monoton nő, páratlan.